Замечание №1. Производящие ф-ции на теормехе и ММФ – это абсолютно разные производящие функции! Между ними нет ничего общего!
Замечание №2: Ответ на вопрос «зачем нужна производящая функция». Незачем, это абсолютно бесполезное говно. Мы её учим только потому, что на неё есть задачи.

Производящих функций 4:
https://ru.wikipedia.org/wiki/Каноническое_преобразование#Производящие_функции
и все они разных аргументов:

$$F_1(q, Q, t)$$
$$F_2(q, P, t)$$
$$F_3(p, Q, t)$$
$$F_4(p, P, t)$$

На ФФ традиционно под производящей ф-цией понимается

$$F_1(q, Q, t) = F(q, Q, t)$$

По умолчанию считать нужно именно её. Однако встречаются такие преобразования, что её нет. Только в этом случае придётся считать не $F_1(q, Q, t)$, а другие: $F_2(q, P, t)$, $F_3(p, Q, t)$, $F_4(p, P, t)$.

Мы разберём 4 примера: Степаньянца с его семинаров, Пименова из его МРЗ и который мне тут прислали.

Задача 1 – упрощённая Степаньянца:

$$\begin{cases} Q = p \\ P = -q \end{cases}$$

На его примере обсудим алгоритм.
Шаг 1: у нас $F_1(q, Q, t)$ функция q и Q***, поэтому от импульсов нам нужно избавляться. Выражаем импульсы через q,Q,t:***

$$\begin{cases} p = Q \\ P = -q \end{cases}$$

Шаг 1 выполнен.
Шаг 2: пишем уравнения на частные производные $F_1(q, Q, t)$:

$$\begin{cases} p = \frac{1}{c}\frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q} \\ P = -\frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q} \end{cases}$$

Написали. ***По умолчанию c=1. Во втором уравнении не прошляпьте минус!***
Шаг 3: в них, пользуясь шагом 1, избавляемся от импульсов:

$$Q = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q}$$

$$-q = -\frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q} => q = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q}$$

Шаг 4, самый сложный и творческий: решить данную систему ДУ в частных производных. Как правило, это делается последовательным интегрированием каждого из 2 уравнений, а далее всмотреться.

Здесь всё легко: из первого

$$F_1(q, Q, t) = Qq + f(Q, t)$$

из второго

$$F_1(q, Q, t) = Qq + q(q, t)$$

откуда

$$F_1(q, Q, t) = Qq + h(t)$$

Где h – любая функция времени.

Задача 2 – из МРЗ Пименова:

$$\begin{cases} P = \dfrac{p^4 - \dfrac{q^6}{2}}{q^4} \\ Q = \dfrac{p}{q} \end{cases}$$

Шаг 1: у нас $F_1(q, Q, t)$, поэтому от красных импульсов нам нужно избавляться. Выражаем импульсы через q,Q,t:

Из нижнего уравнения

$$p = Qq$$

Подставим в верхнее:

$$P = \frac{Q^4 q^4 - \dfrac{q^6}{2}}{q^4} = Q^4 - \frac{q^2}{2}$$

Шаг 1 выполнен.

Шаг 2: пишем уравнения на частные производящие $F_1(q, Q, t)$:

$$\begin{cases} p = \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q} \\ P = -\dfrac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q} \end{cases}$$

Написали. ***По умолчанию c=1. Во втором уравнении не прошляпьте минус!***

Шаг 3: в них подставляем импульсы из шага 1:

$$\begin{cases} Qq = \dfrac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q} \\ Q^4 - \dfrac{q^2}{2} = \dfrac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q} \end{cases}$$

Шаг 4: решить данную систему ДУ в частных производных. Как правило, это делается последовательным интегрированием каждого из 2 уравнений, а далее всмотреться.

Интегрируем верхнее:

$$F_1(q, Q, t) = \frac{Qq^2}{2} + f(Q, t)$$

Интегрируем нижнее:

$$F_1(q, Q, t) = -\left(\frac{Q^5}{5} - \frac{Qq^2}{2} + g(q, t)\right)$$

Откуда

$$F_1(q, Q, t) = -\left(\frac{Q^5}{5} - \frac{Qq^2}{2} + h(t)\right)$$

Где h- любая функция времени.

Задача 1 – НЕупрощённая Степаньянца:

$$\begin{cases} p_i = Q_i \\ P_i = -q_i \end{cases}$$

i пробегает значения от 1 до 3.

Может быть записана и в векторном виде:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{P} = -\boldsymbol{q} \end{cases}$$

Правило суммирования при многомерии: перейди к 1 измерению, получи $F_{1i}(q_i, Q_i, t)$***, а потом просуммируй***

Т.е. ответ

$$F_1(q_1, Q_1, q_2, Q_2, q_3, Q_3, t) = Q_1q_1 + Q_2q_2 + Q_3q_3 + h(t)$$

Правило суммирования при многомерии работает, если координаты не перемешиваются, т.е., например, p_2 ***явно*** зависит только от P_2, но ни в коем случае не, например, Q_3. Если это так – редуцируйте задачу до 1D, а затем просуммируйте.

Задача 4 – её мне кинули в личку:

303. Найти производящую функцию преобразования канонических переменных $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}) \to (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{R})$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} + \dfrac{e}{c}\boldsymbol{\nabla}\alpha(\boldsymbol{r}, t), \\ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}, \end{cases}$$

соответствующего калибровочному преобразованию

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\alpha(\boldsymbol{r}, t), \qquad \varphi \to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\alpha(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}.$$

для заряженной частицы в электромагнитном поле ($\alpha(\boldsymbol{r}, t)$ – произвольная скалярная функция).

Как вы понимаете, мы тут же применяем редукцию в 1D благодаря правилу суммирования:

$$\begin{cases} P = p + \dfrac{e}{c}\dfrac{\partial\alpha(q,t)}{\partial q} \\ Q = q \end{cases}$$

Кто спросит: подождите, а точно ли у нас индексы не перепутываются? Ведь, например

$$P_1 = p_1 + \frac{e}{c} div\alpha(\boldsymbol{q}, t) = p_1 + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial\alpha(\boldsymbol{q},t)}{\partial q_1} + \frac{\partial\alpha(\boldsymbol{q},t)}{\partial q_2} + \frac{\partial\alpha(\boldsymbol{q},t)}{\partial q_3}\right)$$

И у нас к 1-тому индексу замешались 2-й и 3-й!

Но в правиле суммирования речь шла именно про ***явной*** зависимости, а тут не явная, так что отбой, решаем

$$\begin{cases} P = p + \dfrac{e}{c}\dfrac{\partial\alpha(q,t)}{\partial q} \\ Q = q \end{cases}$$

Шаг 1: у нас $F_1(q, Q, t)$, поэтому от красных импульсов нам нужно избавляться. Выражаем импульсы через q,Q,t:

И с этим шагом у нас возникнут проблемы – не получается!

Вспоминаем, что $F_1(q, Q, t)$ может существовать не всегда. Пименов для своей задачи проверяет

Проверим условие существования производящей функции класса $F_1(Q. q, t)$. Должно выполняться требование:

$$\det\left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right) \neq 0.$$

Проверять его бессмысленно, потому что если у вас получится построить $F_1(q, Q, t)$, значит, она есть, а если не получится – значит, её нет.

Выход – искать другую производящую функцию:

$$F_2(q,P,t)$$
$$F_3(p,Q,t)$$
$$F_4(p,P,t)$$
Обратим внимание на то, что $\alpha(q,t)$ является функцией q. Значит, от q мы не должны избавляться, а должны оставить. Это склонит нас к $F_2(q,P,t)$.
Раньше я красным красил импульсы, а синим координаты. Теперь я буду синим красить то, что является аргументом $F_2(q,P,t)$, а красным - что должно уйти.

$$\begin{cases} P = p + \frac{e}{c}\frac{\partial\alpha(q,t)}{\partial q} \\ Q = q \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} p = P - \frac{e}{c}\frac{\partial\alpha(q,t)}{\partial q} \\ Q = q \end{cases}$$

Шаг 2: пишем уравнения на частные производящие $F_2(q,P,t)$:

$$\begin{cases} p = \frac{1}{c}\frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial q} \\ Q = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial P} \end{cases}$$

Написали. ***По умолчанию с=1. Минуса у*** F_2 ***уже нет!***
Шаг 3: в них подставляем красные переменные из шага 1:

$$\begin{cases} P - \frac{e}{c}\frac{\partial\alpha(q,t)}{\partial q} = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial q} \\ q = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial P} \end{cases}$$

Шаг 4 – по очереди интегрируем:

$$\begin{cases} P * \left(q - f(P,t)\right) - \frac{e}{c}\alpha(q,t) = F_2(q,P,t) \\ Pq + g(q,t) = F_2(q,P,t) \end{cases}$$

Подставим нижнее в верхнее:

$$\begin{cases} -P * f(P,t) - \frac{e}{c}\alpha(q,t) = g(q,t) \\ Pq + g(q,t) = F_2(q,P,t) \end{cases}$$

Откуда видно, что $f(P,t) = \frac{h(t)}{P}$ (чтобы $-P * f(P,t)$ не зависело от P!), $g(q,t) = -\frac{e}{c}\alpha(q,t) * h(t)$. $h(t)$ – вновь любая функция времени.
Ответ: $F_2(q,P,t) = Pq + g(q,t) = Pq - \frac{e}{c}\alpha(q,t) * h(t)$.
Ну и применяя правило суммирования

$$F_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{q} - \frac{e}{c}\alpha(\boldsymbol{q}, t) * h(t).$$